VECTEURS DU PLAN

1 Equipollence des bipoints - Vecteurs

Exercices

1 *Qu'est-ce qu'un parallélogramme? Donner des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un quadrilatère convexe soit un parallélogramme.*

2 *Qu'est-ce que la relation de Chasles pour des points alignés? Si* $A \in (BC)$ *avec* $g(A) = 5$ *et* (B,C) *repère de la graduation* g*, calculer* $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{CB}$ *; comparer* $\overline{AC} + \overline{CB}$ *et* $\overline{AB}$.

3 *Démontrer, pour une graduation* g *de* (AB)*, que l'on a*
M *est le milieu de* $[A,B]$ $\Leftrightarrow$ M milieu du bipoint (A,B) $\Leftrightarrow$ $\overline{AM} = \overline{MB}$
$\Leftrightarrow$ $\overline{MA} + \overline{MB} = 0$ $\Leftrightarrow$ $g(M) = \dfrac{g(A) + g(B)}{2}$.

Définition 1 Deux bipoints (A,B) et (C,D) sont dits **équipollents** si et seulement si (A,D) et (B,C) ont même milieu. La relation ainsi définie dans l'ensemble des bipoints du plan se nomme **équipollence**.

Notation: $(A,B) \sim (C,D)$

Exercices

4 *Si* $(A,B) \sim (C,D)$ *et* $C \in (AB)$, *montrer que* $C \neq D$ *et que* $D \in (AB)$. *L'équipollence implique-t-elle l'alignement?*

5 *Si* $\{A, B, C, D\} \subset d$, *déterminer* $g(D)$ *dans le cas où* (A,B) *est le repère de* g, $g(C) = \frac{7}{2}$ *et* $(B,A) \sim (C,D)$. *Calculer l'abscisse du milieu de* (B,D) *et de* (A,C).

6 *Démontrer:*

a) $(A,A) \sim (B,B)$

b) $(A,C) \sim (B,C) \Leftrightarrow A = B$

c) $(A,B) \sim (B,A) \Leftrightarrow A = B$

7 *Si* $(A,B) \sim (C,D)$ *et* $C \notin (AB)$, *que dire de la figure* ABDC ? *Dans l'ensemble des six sommets et du centre d'un hexagone régulier, trouver des bipoints équipollents.*

THEOREME 1 Si $\{A, B, C, D\} \subset d$, alors $(A,B) \sim (C,D)$ si et seulement si $\overline{AB} = \overline{CD}$.

THEOREME 2 $(A,B) \sim (C,D) \Leftrightarrow (A,C) \sim (B,D) \Leftrightarrow (D,B) \sim (C,A)$

THEOREME 3 Les projetés parallèles sur une droite d des deux bipoints équipollents sont des bipoints équipollents.

Exercice 8

Qu'est-ce qu'une relation dans un ensemble, une relation d'équivalence, une partition d'un ensemble? Proposer des exemples.

Définition 2 La **classe d'équivalence** d'un élément a, selon une relation d'équivalence dans un ensemble E, est la partie de E comportant les éléments en relation d'équivalence avec a.

Notation : $Cl_a = \{x \in E \mid x \mathcal{R} a\}$

Exercice 9

Démontrer que pour une relation d'équivalence $\mathcal{R}$*, on a* $a \mathcal{R} b \Leftrightarrow Cl_a = Cl_b$.

A la suite de cet exercice, on peut donc dire qu'une classe d'équivalence peut être "représentée" par l'un quelconque de ses éléments; le nom de la classe ne dépend donc pas du représentant choisi dans la classe.

THEOREME 4 A toute relation d'équivalence définie dans un ensemble E peut être associée une partition de E en classes d'équivalence.

Exercices 10

A-t-on une relation d'équivalence et dans quel ensemble? Si oui, , donner les classes d'équivalence dans les cas suivants.

a) pour deux figures $\mathcal{F}_1$ *et* $\mathcal{F}_2$ *du plan,* $\mathcal{F}_1 \mathcal{R} \mathcal{F}_2 \Leftrightarrow \mathcal{F}_1$ *et* $\mathcal{F}_2$ *ont même aire;*

b) pour deux cercles $\mathcal{C}_{(O_1,r_1)}$ *et* $\mathcal{C}_{(O_2,r_2)}$, $\mathcal{C}_{(O_1,r_1)} \mathcal{R} \mathcal{C}_{(O_2,r_2)} \Leftrightarrow r_1 = r_2$ *;*

c) pour deux cercles $\mathcal{C}_{(O_1,r_1)}$ *et* $\mathcal{C}_{(O_2,r_2)}$, $\mathcal{C}_{(O_1,r_1)} \mathcal{R} \mathcal{C}_{(O_2,r_2)} \Leftrightarrow O_1 = O_2$ *;*

d) pour deux cercles $\mathcal{C}_{(O_1,r_1)}$ *et* $\mathcal{C}_{(O_2,r_2)}$, $\mathcal{C}_{(O_1,r_1)} \mathcal{R} \mathcal{C}_{(O_2,r_2)} \Leftrightarrow r_1 = 2r_2$.

Pourquoi le parallélisme est-il une relation d'équivalence? Dans quel ensemble? Quelles sont les classes?

THEOREME 5 L'équipollence des bipoints est une relation d'équivalence dans $\mathbb{P} \times \mathbb{P}$.

Définition 3 On appelle **vecteur** du plan toute classe d'équivalence selon la relation d'équipollence des bipoints dans $\mathbb{P} \times \mathbb{P}$.

Notation pour les classes d'équivalence: Si $(A,B) \sim (C,D) \sim (E,F) \sim \ldots$

$\vec{v} = \{ (A,B), (C,D), (E,F), \ldots\} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF} = \ldots$

$\vec{0} = \{ (A,A), (B,B), (C,C), \ldots\} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB}$ le vecteur nul

L'ensemble des vecteurs du plan est noté $\mathcal{V}_2 = \{\vec{v}, \vec{0}, \vec{u}, \ldots\}$

Exercices

11 *Démontrer que* M *est le milieu de* (A,B) *si et seulement si* $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$.

12 *On donne un parallélogramme* ABCD *et* $(A,A') \sim (B,B')$. *Démontrer que l'on a* $(D,C) \sim (A',B')$ *et* $(D,A') \sim (C,B')$. *On pose* A *milieu de* [D,E]; *démontrer que* $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AE}$ *et* $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{EB}$.

13 *Démontrer que l'on a:*

a) *Pour* $\mathcal{S}_O$ *une symétrie de centre* O, $(A,B) \sim (\mathcal{S}_O(B), \mathcal{S}_O(A))$.

b) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BF} \Rightarrow$ B *milieu de* (A,F).

14 *Si* $A \notin (BC)$ *et* D, E, F *sont les projetés respectifs de* A, B, C *sur* d, *comment choisir la projection pour avoir* $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{EF}$? *Donner une condition nécessaire et suffisante.*

15 *Peut-on avoir* $A \in (BC) \Rightarrow (p_a(A), p_a(B)) \sim (p_a(B), p_a(C))$?

16 *Si* ABCD *est un parallélogramme et* $(A,E) \sim (B,F) \sim (C,G) \sim (D,H)$ *et* O *le milieu de* (C,E), *démontrer:*

a) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EF}$ *et* $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{EH}$

b) $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{CF}$. *En déduire que* O *est milieu de* (D,F) *et que* {A,B,C,D,E,F,G,H} *admet un centre de symétrie.*

17 *A-t-on* $\{A,B\} \in \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AB} \subset \mathbb{P} \times \mathbb{P}$, $(C,D) \in \overrightarrow{CD}$, $\vec{v} \in \mathbb{P}$, $\vec{v} \subset \mathbb{P}$?

18 *Démontrer:* $(A,B) \in \vec{v} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \vec{v}$ *et* $(A,B) \in \overrightarrow{BA} \Leftrightarrow A = B$.

19 ***Théorème.*** *Si* $(A,B) \in \vec{v}$ *et* $C \in \mathbb{P}$, *alors il existe un et une seul* D *tel que* $(A,B) \sim (C,D)$.

20 *On appelle* ***translation*** *de vecteur* $\vec{v}$ *la relation* $t_{\vec{v}} = (\mathbb{P}, \mathbb{P}, G)$, *où* $(A,A') \in G \Leftrightarrow \overrightarrow{AA'} = \vec{v}$.

Démontrer que $t_{\vec{v}}$ *est une application et que cette application est bijective.*

Quel nom donner à $t_{\vec{0}}$? *Une translation peut-elle admettre un point fixe?*

21 *On donne le parallélogramme* ABCD *et* $t_{\overrightarrow{AB}}(B) = B'$ *et* $t_{\overrightarrow{AB}}(C) = C'$. *Démontrer*

a) B *est milieu de* (A,B')

b) $C' \in (DC)$

c) $t_{\overrightarrow{AC}}(B) = C'$, $t_{\overrightarrow{BD}}(B') = C$. *Qu'est-ce que* $t_{\overrightarrow{AB}} \circ t_{\overrightarrow{BC}}$ *et* $t_{\overrightarrow{BC}} \circ t_{\overrightarrow{AB}}$?

2 Somme dans $\mathcal{V}_2$

Exercice 22

Qu'est-ce qu'une opération, un groupe? Proposer des exemples dans $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$. *Peut-on parler d'opération dans un ensemble autre qu'un ensemble de nombres?*

THEOREME 6 Si $(A,B) \in \vec{u}$ et $(B,C) \in \vec{v}$, alors la relation de $\mathcal{V}_2 \times \mathcal{V}_2$ vers $\mathcal{V}_2$ telle que $(\vec{u},\vec{v}) \mapsto \vec{w} = \overrightarrow{AC}$ est une application.

Pour démontrer ce théorème, on prouve que pour tout couple il y a au moins une image (1) et pas deux images (2).

1) Pour tout couple $(\vec{u},\vec{v})$ il existe des représentants.

$\forall\ (A',B') \in \vec{u}\quad \exists^*\ C' \in \mathbb{P}\quad (B',C') \sim (B,C)$

Avec O milieu de (B',C), $C' = \mathcal{S}_O(B)$.

2) $$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}\\ \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{B'C'}\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}\\ \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'}\end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{CC'} \Rightarrow \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A'C'}$$

Définition 4 On appelle **addition** ou **somme** dans $\mathcal{V}_2$ l'opération notée $+$ qui, à tout

$(\vec{u},\vec{v}) \in \mathcal{V}_2 \times \mathcal{V}_2$ avec $(A,B) \in \vec{u}$ et $(B,C) \in \vec{v}$, associe $\vec{w} = \overrightarrow{AC}$.

$(\vec{u},\vec{v}) \mapsto \vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} = \vec{w}$.

Le vecteur $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$ est appelé **vecteur somme**.

<u>Remarque</u>

L'addition ou la somme est une opération. La somme de deux vecteurs est un vecteur.

THEOREME 7	$(\mathcal{V}_2, +)$ est un groupe commutatif.

<u>Remarques</u>

1 Si $\vec{v}\,'$ est le vecteur opposé de $\vec{v}$, on écrit aussi $\vec{v}\,' = -\vec{v}$

et $\vec{w} + \vec{v}\,' = \vec{w} + (-\vec{v}) = \vec{w} - \vec{v}$

2 $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$ et $\vec{v} + \overrightarrow{BA} = \vec{v} + (-\overrightarrow{AB}) = \vec{v} - \overrightarrow{AB}$

3 Le bipoint représentant le vecteur somme $\vec{u} + \vec{v}$ est la diagonale du parallélogramme construit avec les représentants des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Exercices

23 ***Théorème de Chasles.*** $\forall M \in \mathbb{P}$ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}$.

En déduire $\forall M \in \mathbb{P}$ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA}$.

24 *Simplifier:* $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{KL} + \overrightarrow{BK} + \overrightarrow{LE} = ?$ $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EA} - \overrightarrow{DB} = ?$

25 *On donne un carré* ABCD. *Construire* E *et* F *si* $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC}$.

Démontrer que $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CF}$; *en déduire que* C,B, E *sont alignés.*

26 *Si* $A \notin (BC)$, *dessiner* M *dans chacun des cas suivants:*

a) $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

b) $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}$. *Démontrer que* B *est milieu de* (M,C).

c) $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$. *Démontrer que* ACMB *est un parallélogramme.*

d) $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}$. *Démontrer que* B *est milieu de* (A,M).

e) $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA}$

f) $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}$

g) $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA}$

27 *Dans l'ensemble* {A,B,C,D,E,F,O} *des 6 sommets et du centre d'un hexagone régulier, donner un bipoint représentant les vecteurs suivants.*

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$ b) $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{EF}$ c) $\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{OC}$

d) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AO}$ e) $\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}$ f) $\overrightarrow{EO} - \overrightarrow{ED}$

g) $\overrightarrow{DO} + \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{OC}$ h) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{DE}$ i) $\overrightarrow{FA} - \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{ED}$

28 *Quelle est l'image d'un parallélogramme par une translation* $t_{\vec{v}}$?

29 *Si* $E \notin (FG)$, *démontrer que* G *est milieu de* $(E, t_{\overrightarrow{EG}}(G))$ *et* $(GF) \parallel (t_{\overrightarrow{EG}}(G)\, t_{\overrightarrow{EG}}(F))$.

30 *Si* $\mathcal{T}$ *est l'ensemble des translations, alors* $(\mathcal{T}, \circ)$ *est un groupe commutatif.*

3 Multiplication externe

THEOREME 8 Si $(A,B) \in \vec{u}$ et $(A,C) \in \vec{v}$ avec $\{A, B, C\} \subset d$ et $\overline{AC} = x \cdot \overline{AB}$, alors la relation de $\mathbf{R} \times \mathcal{V}_2$ vers $\mathcal{V}_2$ telle que $(x, \vec{u}) \mapsto \vec{v}$ est une application.

Définition 5 On appelle **multiplication des vecteurs par un réel** l'opération externe notée • telle que pour tout couple $(x, \vec{u}) \in \mathbf{R} \times \mathcal{V}_2$, $(x, \vec{u}) \mapsto \vec{v} = x \cdot \vec{u}$ avec $(A,B) \in \vec{u}$, $(A,C) \in \vec{v}$, $\{A, B, C\} \subset d$ et $\overline{AC} = x \cdot \overline{AB}$.

THEOREME 9 La multiplication des vecteurs par un réel possède les propriétés suivantes

1)	$1 \cdot \vec{v}$	$=$	$\vec{v}$	
2)	$\alpha \cdot (\beta \cdot \vec{v})$	$=$	$(\alpha\beta) \cdot \vec{v}$	associativité sur les nombres
3)	$(\alpha + \beta) \cdot \vec{v}$	$=$	$\alpha \cdot \vec{v} + \beta \cdot \vec{v}$	distributivité sur les nombres
4)	$\alpha \cdot (\vec{u} + \vec{v})$	$=$	$\alpha \cdot \vec{u} + \alpha \cdot \vec{v}$	distributivité sur les vecteurs

<u>Remarques</u>

S'il n'y a pas de confusion, on écrit aussi: $x \cdot \vec{v} = x\,\vec{v}$

Le produit d'un nombre et d'un vecteur est un vecteur.

La multiplicaton des vecteurs par un réel est une application.

Avec $A \neq B$ et $x \neq 0$, pour $\overrightarrow{AC} = x\,\overrightarrow{AB}$, les points A, B et C sont toujours alignés.

Exercices

31 *Si* $A \notin (BC)$, *dessiner* M *dans les cas suivants.*

a) $\overrightarrow{AM} = 2\,\overrightarrow{AB}$

b) $\overrightarrow{AM} = 2\,\overrightarrow{AB} + 3\,\overrightarrow{BC}$

c) $\overrightarrow{CM} = -2\,\overrightarrow{BC}$

d) $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\,\overrightarrow{BA} - \frac{2}{3}\,\overrightarrow{BC}$

e) $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MA}$

f) $-\,\overrightarrow{MA} + 2\,\overrightarrow{MC} - 3\,\overrightarrow{MB} = \vec{0}$

32 *Démontrer que l'égalité est compatible avec la multiplication d'un vecteur par un réel.*

33 *Démontrer :* M *milieu de* (A,B) $\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = 2\,\overrightarrow{AM}$

34 *Démontrer que l'on a*

$0 \cdot \overrightarrow{AB} = \vec{0}$

$(-1) \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA} = -\,\overrightarrow{AB}$

$3\,\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} \Rightarrow (-3)\,\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CA}$

$x \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} \Rightarrow (-x)\,\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CA}$

35 *Démontrer qu'un translation de vecteur* $\vec{v}$ *transforme un segment en un segment et une droite en une droite qui lui est parallèle.*

THEOREME 10 Si $\vec{0} \notin \{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\}$, alors $\overrightarrow{AB} = \alpha \cdot \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow (AB) \parallel (CD)$.

Définition 6 Pour $\vec{0} \notin \{\vec{u}, \vec{v}\}$

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits de **même direction** si et seulement si $\vec{u} = \alpha \cdot \vec{v}$ ou $\vec{v} = \beta \cdot \vec{u}$

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits de **même sens** si et seulement si $\vec{u} = \alpha \cdot \vec{v}$ et $\alpha > 0$

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits de **sens contraires** si et seulement si $\vec{u} = \alpha \cdot \vec{v}$ et $\alpha < 0$

Exercices

36 *Donner quelques vecteurs de même direction, de même sens, de sens contraires dans les cas suivants.*

a) *Pour un losange* ABCD *de centre* O *avec* $\mathcal{S}_D(A) = A'$, $\mathcal{S}_D(B) = B'$, $\mathcal{S}_D(C) = C'$.

b) *Pour un trapèze* ABCD *avec* $(AB) \parallel (CD)$ *et* $\mathcal{S}_{(AB)}(D) = D'$ *et* $\mathcal{S}_{(AB)}(C) = C'$.

37 *Si* $A \notin (BC)$ *et* $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$ *et* $\overrightarrow{CD} = 2\,\overrightarrow{BE}$, *dessiner* D *et* E. *Démontrer:*

a) $(AB) \parallel (CD)$.

b) $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{EA}$ *sont de sens contraires.*

c) B *est milieu de* (A,E) *et* ACDE *parallélogramme.*

38 *Si* $A \notin (BC)$, M_1 *milieu de* (A,C) *et* M_2 *milieu de* (B,C), *démontrer:*

a) $\overrightarrow{AB} = 2\,\overrightarrow{M_1M_2}$ *(quel est ce théorème?)*

b) $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM_2} \Rightarrow \overrightarrow{BG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BM_1}$ *(quel est ce théorème?)*

39 *Démontrer:*

a) I *est le milieu de* (A,B) *si et seulement si* $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$.

b) *Si* I *est le milieu de* (A,B), *alors pout tout* $M \in \mathbf{P}$, *on a* $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\,\overrightarrow{MI}$.

Que dire du triangle AMB *si* $2\delta(M,I) = \delta(A,B)$?

Quel est l'ensemble $\{M \in \mathbf{P} \mid \delta(M,I) = \frac{1}{2}\delta(A,B)\}$?

40 *Si* A, B, C *sont trois points distincts,* M *est dit* **barycentre** *de* A, B, C *affectés des coefficients respectifs* α, β, γ *si et seulement si* $\alpha\,\overrightarrow{MA} + \beta\,\overrightarrow{MB} + \gamma\,\overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

Démontrer que M *existe et est unique si et seulement si* $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$.

41 *Si* $A \notin (BC)$:

a) *peut-on parler du barycentre de deux points* A *et* B *affectés des coefficients* $\alpha = 1$ *et* $\beta = 1$? *Quel serait le barycentre de* A *et* B *affectés des coefficients* α *et* β *si* $(\alpha,\beta) \in \{(2; 1), (2; 3), (1; -1)\}$?

b) *dessiner l'équibarycentre de* A, B, C ($\alpha = \beta = \gamma$);

c) *dessiner le barycentre de* A, B, C *dans les cas suivants:* $(\alpha,\beta,\gamma) \in \{(2,3,4); (-2,3,1); (3,-1,-1)\}$;

d) *démontrer que le vecteur* $\vec{v} = 3\,\overrightarrow{MA} + 2\,\overrightarrow{MB} - 5\,\overrightarrow{MC}$ *ne dépend pas du choix de* M *dans* $\mathbf{P}$;

e) *donner une condition nécessaire et suffisante pour* α, β *et* γ *si* $\vec{v} = \alpha\,\overrightarrow{MA} + \beta\,\overrightarrow{MB} + \gamma\,\overrightarrow{MC}$ *est un vecteur fixe quel que soit* $M \in \mathbf{P}$.

Pour la mesure des vecteurs, on utilise des propriétés analogues à celles de la distance, de la mesure des angles ou de la mesure des aires.

Exercice 42

Comment peut-on définir une mesure des arcs, une longueur des segments? Citer des propriétés de ces mesures. Comment définir une mesure sur $\mathcal{V}_2$*, appelée norme et notée* $\|...\|$*, en utilisant* $(A,B) \in \vec{v}$ *et* $\|\vec{v}\| = \delta(A,B)$?

Pour mesurer les vecteurs, il convient de respecter la structure de $\mathcal{V}_2$, l'addition et la multiplication des vecteurs par un réel. Pour cela, on pose la définition suivante.

Définition 7 On appelle **norme** sur l'ensemble des vecteurs $\mathcal{V}_2$ une application, notée $\|...\|$ et

$$\|...\| : \mathcal{V}_2 \to \mathbf{R}_+$$
$$\vec{v} \mapsto \|\vec{v}\|$$

telle que:

$\|\vec{v}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{v} = \vec{0}$ pour fixer le début de la mesure

$\|\alpha\vec{v}\| = |\alpha|\|\vec{v}\|$ pour tenir compte de l'opération externe

$\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$ pour tenir compte de la somme des vecteurs

Remarque

La norme est une application, la norme d'un vecteur $\vec{v} \in \mathcal{V}_2$ est le nombre $\delta(A,B)$ et $(A,B) \in \vec{v}$.

Exercices 43

Pourquoi $\|\vec{v}\| = \|-\vec{v}\|$? *Y a-t-il plusieurs vecteurs associés à* 1 ?

Définition 8 Un vecteur est dit **unitaire** si et seulement si sa norme est 1.

Exercices

44 *Comparer* $\|\vec{u} + \vec{v}\|$ *et* $\|-\vec{u} - \vec{v}\|$.

45 *Avec* $\|\alpha\vec{v}\| = |\alpha|\|\vec{v}\|$, *démontrer:* $\alpha\vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \alpha = 0$ ou $\vec{v} = \vec{0}$.

46 *Si* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *ont même direction, comparer* $\|\vec{u}+\vec{v}\|$ *et* $\|\vec{u}\|+\|\vec{v}\|$.

Dans quel cas a-t-on $\|\vec{u}+\vec{v}\| < \|\vec{u}\|+\|\vec{v}\|$?

47 *Si* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *de sens contraires et* $\|\vec{u}\| \geq \|\vec{v}\|$, *comparer* $\|\vec{u}+\vec{v}\|$ *et* $\|\vec{u}\|-\|\vec{v}\|$.

48 *Démontrer:* $\|\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}\| \leq \|\vec{u}\|+\|\vec{v}\|+\|\vec{w}\|$.

49 *Si, dans un parallélogramme* ABCD, $\delta(A,B) = 7$ *et* $\delta(B,C) = 3$, *calculer:*
$\|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CB}\|$, $\|\overrightarrow{AB} + 3\,\overrightarrow{DC}\|$, $\|2\,\overrightarrow{AD} - 3\,\overrightarrow{BC}\|$, $\|2\,\overrightarrow{AC} + 2\,\overrightarrow{CB}\|$. *Donner un encadrement de* $\|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\|$.

50 *Montrer que pour tout vecteur* $\vec{v}$ *non nul, il existe exactement deux vecteurs unitaires de même direction que* $\vec{v}$.

4 Base de $\mathcal{V}_2$

Définition 9 Deux vecteurs sont **colinéaires** si et seulement si l'un est multiple de l'autre.

Exercices

51 *Le vecteur nul et tout vecteur du plan sont colinéaires. Deux vecteurs opposés sont-ils colinéaires? Et deux vecteurs de sens contraires, deux vecteurs de même sens?*

52 *Comment choisir des représentants de deux vecteurs pour que ces deux vecteurs soient colinéaires?*

THEOREME 11 Il existe au moins deux vecteurs non colinéaires dans $\mathcal{V}_2$.

Définition 10 Deux vecteurs non colinéaires sont aussi dits **linéairement indépendants.**

Exercices

53 *On donne un carré* ABCD. *Les vecteurs* $\overrightarrow{AC}$ *et* $\overrightarrow{BD}$ *sont-ils colinéaires? Qu'en est-il de* $2\,\overrightarrow{AB}$ et $-3\,\overrightarrow{BD}$? *Montrer que si* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *ne sont pas colinéaires et* $0 \notin \{x,y\}$, *alors* $x\cdot\vec{u}$ *et* $y\cdot\vec{v}$ *ne sont pas colinéaires.*

54 *Si* ABCD *est un parallélogramme,* $2\,\overrightarrow{AB}$ et $3\,\overrightarrow{CD}$ *sont-ils colinéaires? Montrer que si* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *sont colinéaires, alors* $x\cdot\vec{u}$ *et* $y\cdot\vec{v}$ *sont colinéaires. La réciproque est-elle vraie?*

Définition 11 On appelle **combinaison linéaire** de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le vecteur $\vec{t}$ tel que

$$\vec{t} = \alpha\cdot\vec{u}+\beta\cdot\vec{v}$$

***Exercice** 55*

Si ABCD *est un trapèze et* (AB) || (CD), *dessiner* E *et* F *si* $\overrightarrow{AE} = 2\,\overrightarrow{AB} + 2\,\overrightarrow{DC}$ *et* $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AC} - 2\,\overrightarrow{BD}$. *Comment choisir* α *et* β *si* $\overrightarrow{AA} = \alpha\,\overrightarrow{AC} + \beta\,\overrightarrow{BD}$?

THEOREME 12	Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires si et seulement si $\alpha\vec{u}+\beta\vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \alpha = \beta = 0.$

COROLLAIRE	Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont linéairement indépendants, alors $\alpha\cdot\vec{u}+\beta\cdot\vec{v} = x\cdot\vec{u}+y\cdot\vec{v} \Leftrightarrow \alpha = x$ et $\beta = y$

THEOREME 13 Tout vecteur de $\mathcal{V}_2$ s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire de deux vecteurs linéairement indépendants de $\mathcal{V}_2$.

Définition 12 Une **base** de $\mathcal{V}_2$ est un couple de vecteurs linéairement indépendants.

Définition 13 Si $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base de $\mathcal{V}_2$ et $\vec{t} = x\cdot\vec{u} + y\cdot\vec{v}$, alors x et y s'appellent respectivement première et seconde **composantes** de $\vec{t}$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$.

Notation: $\vec{t} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans la base donnée.

COROLLAIRE Deux vecteurs sont égaux si et seulement si ils ont les mêmes composantes respectives dans la même base.

Exercices

56 *Si* $(\vec{u}, \vec{v})$ *est une base de* $\mathcal{V}_2$, *quelles sont les composantes de* $\vec{u}$, *de* $\vec{v}$, *de* $\vec{0}$, *de* $-\vec{v}$ *et celles de* $\vec{u} - \vec{v}$? $(\vec{v}, \vec{u})$ *est-il aussi une base de* $\mathcal{V}_2$?

57 *Si* $(\vec{u}, \vec{v})$ *est une base de* $\mathcal{V}_2$, $\vec{t} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ *et* $\vec{s} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$, *donner les composantes de* $\vec{a} = \vec{t} + \vec{s}$ *et de* $\vec{b} = 2\vec{t} - 3\vec{s}$. *Si* $\vec{w} = \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{t}$ *et* $\vec{w}$ *sont-ils colinéaires? Et* $\vec{s}$ *et* $\vec{w}$?

58 *Dans la base* $(\vec{i}, \vec{j})$, *si* $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ *et* $\vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, *montrer que* $\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$ *et* $\alpha\vec{u} = \begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha y \end{pmatrix}$

59 *Dans la base* $(\vec{i}, \vec{j})$, *on donne* $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 10 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} -10 \\ 25 \end{pmatrix}$, $\vec{t} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}$. *A-t-on* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *colinéaires? Même question pour* $\vec{u}$ *et* $\vec{w}$, $\vec{v}$ *et* $\vec{w}$. *Comment choisir* x *si* $\vec{u}$ *et* $\vec{t}$ *sont colinéaires, si* $\vec{v}$ *et* $\vec{t}$ *non colinéaires?*

THEOREME 14 Si $(\vec{i}, \vec{j})$ est une base de $\mathcal{V}_2$, $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $\text{dét}(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - x'y = 0$.

Exercices

60 Si $(\vec{i}, \vec{j})$ est une base de $\mathcal{V}_2$, $\vec{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$:

a) écrire $\vec{u}$ et $\vec{v}$ comme combinaison linéaire de $\vec{i}$ et $\vec{j}$;

b) a-t-on $\vec{u}$ et $\vec{v}$ respectivement $\vec{u}$ et $\vec{w}$ colinéaires?

c) si $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base de $\mathcal{V}_2$, déterminer les composantes de $\vec{i}$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$.

Quelles sont les composantes de $\vec{u}$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$?

61 Déterminer x si $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} x-1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont colinéaires. Peut-on trouver y si $\vec{s} = \begin{pmatrix} y+1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{t} = \begin{pmatrix} 2 \\ y+2 \end{pmatrix}$ sont deux vecteurs colinéaires? Trouver z si $\vec{a} = \begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ z \end{pmatrix}$ sont colinéaires.

5 Repère du plan

Définition 14 On appelle **repère** du plan un triplet $(O, \vec{i}, \vec{j})$ où $O \in \mathbf{P}$ et $(\vec{i}, \vec{j})$ est une base de $\mathcal{V}_2$. Le point O se nomme **origine** du repère.

Exercices

62 Si $O \in (IJ)$, a-t-on $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$ repère du plan?

63 Si $A \notin (BC)$, combien de repères peut-on donner à l'aide de ces trois points?

64 *Si* $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ *est un repère du plan et* $A \notin (CD)$, *comment choisir* C *et* D *pour que* $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{CD})$ *soit un repère du plan? Si on ajoute* $(OB) \parallel (CD)$, *a-t-on* $(A, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{CD})$ *repère du plan?*

Définition 15 On appelle **coordonnées** d'un point M du plan dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ les composantes du vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$. La première coordonnée se nomme **abscisse** de M et la seconde **ordonnée**.

Notation : $\overrightarrow{OM} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} \Leftrightarrow M(x,y)$

Exercice 65

Si $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ *est un repère du plan, pourquoi a-t-on* $A \notin (BC)$? *On donne* $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ *et* $\overrightarrow{AN} = 2\,\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$. *Quelles sont les coordonnées de* A, B, C, M, N ? *Quelles sont les composantes des vecteurs* $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{MN}$?

THEOREME 15 Si dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ on donne $A(a_1, a_2)$ et $B(b_1, b_2)$ alors:

1. $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix}$
2. M milieu de (A,B) $\Leftrightarrow$ $M\left(\frac{a_1 + b_1}{2}, \frac{a_2 + b_2}{2}\right)$.

Exercice 66

Dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, *on donne* A(1; 2) *et* B(-3; -1). *Trouver* x, y *et* z *si* $M(x, 0) \in (AB)$ *et* $N(0, y) \in (AB)$ *et* $D(z, 2) \in (AB)$. *A-t-on* $E(3; 3) \in (AB)$?

THEOREME 16 Si $(A,B) \in \mathbf{P}^2$ et $A \neq B$, alors $(AB) = \{ M \in \mathbf{P} \mid \overrightarrow{AM} = \lambda\,\overrightarrow{AB} \}$.

Remarque

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est appelé **vecteur directeur** de la droite (AB). Un vecteur directeur est toujours différent du vecteur nul. Tout vecteur non nul colinéaire à $\overrightarrow{AB}$ est aussi un vecteur directeur de la droite (AB).

Définition 16 Un **repère d'une droite** passant par un point A et de vecteur directeur $\vec{v} \neq \vec{0}$ est le couple $(A, \vec{v})$.

Notation

$d(A,\vec{v})$ pour la droite d passant par A et de vecteur directeur $\vec{v}$.

Définition 17 Pour un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan, les droites $d(O,\vec{i})$ et $d(O,\vec{j})$ sont appelées premier **axe**, respectivement deuxième **axe** du système de coordonnées.

THEOREME 17 Deux droites sont parallèles si et seulement si leurs vecteurs directeurs respectifs sont colinéaires.

Exercices

67 *Les droites* (AB) *et* (CD) *sont-elles parallèles dans les cas suivants? Quelle est l'intersection de* (AB) *avec les axes du système de coordonnées?*

a) $A(2;1)$, $B(2;0)$, $C(\frac{3}{2};\frac{1}{2})$, $D(\frac{3}{2};0)$

b) $A(1;-2)$, $B(1;0)$, $C(-1;-\frac{3}{2})$, $D(2;0)$

c) $A(1;-1)$, $B(2;-3)$, $C(3;-2)$, $D(5;-6)$

68 *On donne* $A(3;5)$, $B(1;-3)$, $\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}$. *Déterminer le point de l'intersection des droites* $d(A,\vec{a})$ *et* $d(B,\vec{b})$.

69 *On donne* $A(-3;-5)$, $B(5;1)$, $C(1;7)$. *Déterminer les milieux des côtés du triangle* ABC *et le point de concours des médianes.*

70 *Démontrer si* $A \neq B$, *que* $\{M \in \mathbb{P} \mid \overrightarrow{AM} = \alpha\, \overrightarrow{AB} \text{ et } \alpha \geq 0\} = [A,B)$.

71 *Dans le repère* $(O, \vec{i}, \vec{j})$, *on donne* $A(-1; 2)$ *et* $B(3; 1)$. *Commet choisir* x *et* y *si* $M(x, y) \in (AB)$?

72 *On donne* $F = \{M(x, y) \in \mathbb{P} \mid y = 4x - 1\}$ *avec* $(O, \vec{i}, \vec{j})$ *repère du plan. Les points* $O(0; 0)$, $B(\frac{1}{4}; 0)$, $C(1; 3)$, $D(2; 6)$, $E(\frac{8}{5}; \frac{3}{5})$ *sont-ils éléments de* F ?

6 Homothétie et similitude

La géométrie étudie les transformations des figures en recherchant les propriétés conservées, les points invariants.

Exercice 73

Citer des propriétés conservées par la rotation, la translation, la symétrie centrale, l'isométrie. Toutes les transformations dans le plan conservent-elles la distance?
Comment définir une transformation dans le plan? Proposer une définition d'une "dilatation", d'une "contraction".

Définition 18 On appelle **homothétie** de centre A et de rapport r $(r \neq 0)$ l'application

$$\mathcal{H}_{(A,r)} : \mathbb{P} \to \mathbb{P}$$

$$M \mapsto M' = \mathcal{H}_{(A,r)}(M) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AM'} = r \cdot \overrightarrow{AM}$$

Exercice 74

Soit $\mathcal{H}_{(0,2)} : \mathbb{P} \to \mathbb{P}$ *et* $\mathcal{H}_{(0,2)}(M) = M'$. *Si* $(O, \vec{i}, \vec{j})$ *est un repère du plan, dessiner l'image des points suivants,* $A(3; 1)$, $B(-2; -\frac{2}{3})$, O, $C(3; 3)$, $D(-1; \frac{5}{3})$, $E(6; 4)$. *Comment sont transformés ces points par* $\mathcal{H}_{(0, \frac{1}{2})}$?

THEOREME 18 Une homothétie est une bijection.

***Exercice** 75*

Avec $(O, \vec{i}, \vec{j})$ *repère du plan,* A(- 1; 2) , B(3, 1) , C(- 8; 2) , D(1; 1) , *dessiner* B' *et* B" *si* B' = $\mathcal{H}_{(0,\frac{1}{4})}$(B) *et* B" = $\mathcal{H}_{(0,4)}$(B') . *Même question avec* C' et C", A' *et* A", D' et D", O' et O".

THEOREME 19 Le composé de deux homothéties de même centre A et de rapports respectifs r_1 et r_2 est l'homothétie de centre A et de rapport $r_1 \cdot r_2$.

THEOREME 20 L'homothétie de rapport 1 est l'identité.
Le seul point fixe d'une homothétie de rapport différent de 1 est son centre.

THEOREME 21 Par une homothétie $\mathcal{H}_{(A,r)}$:

1. le rapport de colinéarité de deux vecteurs est conservé;
2. les distances sont multipliées par le facteur constant $|r|$;
3. le centre, un point et son image sont sur une droite;
4. une droite passant par le centre est globalement invariante;
5. toute droite a pour image une droite parallèle;
6. l'image d'une demi-droite est une demi-droite;
7. le parallélisme et l'orthogonalité sont conservés;
8. les mesures des angles sont conservées.

Exercices

76 *Qu'est-ce que* $\mathcal{H}_{(A,-1)}$? *Comment choisir* r *si* $\mathcal{H}_{(A,r)}$ *est une isométrie?*

77 *On donne deux carrés* ABCD *et* EFGH *quelconques dans le plan. Déterminer une homothétie par laquelle l'image de* ABCD *est inscrite dans le carré* EFGH.

78 *Soit* $a \cap b = \{S\}$ *et* $P \notin a \cup b$. *Construire un cercle passant par* P *tangent à* a *et* b. *(Utiliser une homothétie de centre* S)

79 *Si une figure admet un centre de symétrie, son image par une homothétie également.*

80 *Par une homothétie, l'image d'un rectangle est un rectangle.*

81 *Les projetés orthogonaux des sommets d'un rectangle sur les diagonales auxquelles ils n'appartiennent pas sont les sommets d'un rectangle homothétique au premier.*

82 *Donner une condition nécessaire et suffisante pour que deux segments soient homothétiques. Peut-on donner un critère d'homothétie pour deux rectangles? deux triangles?*

Définition 19 Si $\mathcal{H}_{(A,r)}$ est une homothétie et f une isométrie, alors on appelle **similitudes** les composés $f \circ \mathcal{H}_{(A,r)}$ et $\mathcal{H}_{(A,r)} \circ f$.

Deux figures sont dites **semblables** si l'une est l'image de l'autre par une similitude.

THEOREME 22 Dans une similitude:

1. le rapport de colinéarité de deux vecteurs est conservé;
2. les distances sont multipliées par un facteur constant appelé rapport de similitude;
3. toute droite a pour image une droite;
4. le parallélisme et l'orthogonalité sont conservés;
5. les mesures des angles sont conservées.

Pour démontrer que deux figures sont semblables, il suffit de trouver une homothétie qui applique la première figure sur une figure isométrique à la seconde. Dans le cas des triangles, on peut abréger la recherche des similitudes par l'emploi des critères suivants.

THEOREME 23 Deux triangles qui ont deux secteurs respectivement isométriques sont semblables.

Deux triangles qui ont un secteur isométrique dont les frontières portent des côtés de longueurs respectivement proportionnelles sont semblables.

Deux triangles qui ont leurs trois côtés de longueurs respectivement proportionnelles sont semblables.

Exercices

83 *Si l'on donne deux segments, existe-t-il une similitude transformant l'un en l'autre? Dans quel cas?*

84 *Démontrer que:*

a) deux triangles rectangles qui ont un secteur aigu isométrique sont semblables;

b) deux triangles isocèles qui ont un secteur de la base isométrique ou le secteur du sommet isométrique sont semblables;

c) tous les triangles équilatéraux sont semblables.

85 *On donne un cercle de diamètre* [A,B] *et la tangente* t *en* B. *Démontrer que pour toute droite* d *passant par* A *qui recoupe le cercle en* R *et coupe* t *en* S, *on a* $\delta(A,R) \cdot \delta(A,S) = \delta(A,B)^2$.

86 *Dans le triangle* ABC, $(AB) \perp (BC)$ *et* $E \in [A,B]$, $F \in [B,C]$, $\{D, G\} \subset [A,C]$. *Si* DEFG *est un carré, son côté est moyenne proportionnelle des deux segments restant sur l'hypoténuse.*

87 *La bissectrice du secteur de sommet* A *d'un triangle* ABC *coupe le côté* [B,C] *en* D *et le cercle circonscrit du triangle* ABC *en* E.

Montrer que $\delta(E,A) \cdot \delta(E,D) = \delta(E,B)^2$ *et* $\delta(E,A) \cdot \delta(E,D) = \delta(E,C)^2$.

En déduire que $\delta(E,B) = \delta(E,C)$.

88 *Théorème de la bissectrice.*

Soit $A \notin (BC)$, $\mathcal{S}_d([B,A)) = [B,C)$ et $d \cap [A,C] = \{D\}$. *Démontrer que* $\dfrac{\delta(B,A)}{\delta(B,C)} = \dfrac{\delta(D,A)}{\delta(D,C)}$

(Construire $(AE) \parallel (BC)$ *et* $E \in d$).

89 *On donne* M *le milieu du côté* [B,C] *d'un triangle* ABC *et les bissectrices des secteurs* [AMB] *et* [AMC] *qui coupent* (AB) *et* (AC) *respectivement en* D *et* E. *Montrer que* $\dfrac{\delta(D,A)}{\delta(D,B)} = \dfrac{\delta(E,A)}{\delta(E,C)}$ *et que* (DE) *est parallèle à* (BC).

90 *Un mât est planté sur la place du village. Un gros boulon y est fixé à 2 m du sol. L'ombre du mât mesure 4.75 m et l'ombre du boulon se situe à 0.80 m du pied du mât. Quelle est la hauteru du mât ?*

91 *Une première sécante coupe 3 parallèles en* A, B *et* C. *Une deuxième sécante coupe les mêmes parallèles respectivement en* D, E *et* F. *On donne* $\delta(A,B) = 6$, $\delta(D,E) = 12$, $\delta(E,F) = 15$, $\delta(A,D) = 9$, $\delta(B,E) = 13$, *calculer* $\delta(G,F)$.

92 *Dans un trapèze* ABCD, $(AB) \parallel (CD)$, $\delta(A,B) = 9$, $\delta(C,D) = 6$ *et* $\delta(A,C) = 10$. O *est le point de l'intersection des diagonales. Calculer* $\delta(O,A)$.

93 *On donne deux points* D *et* E *sur le côté* [A,B) *d'un secteur* [BAC]. *Par* D *et* E, *passent deux parallèles coupant* (AC) *respectivement en* F *et* G. *Par* G, *une parallèle à* (FE) *coupe* (AB) *en* H. *Démontrer que* $\delta(A,E)^2 = \delta(A,D)\cdot\delta(A,H)$.

94 *Dans un parallélogramme* ABCD, *un parallèle à* (AC) *coupe* [A,B] *et* [B,C] *respectivement en* E *et* F. *Par* E *et* F *passent deux parallèles à* (BD) *qui coupent* [A,D] *et* [C,D] *respectivement en* H *et* G. *Démontrer que* $\delta(A,H)\cdot\delta(C,D) = \delta(A,D)\cdot\delta(C,G)$.